

地震层析成象的 BG 方法初步研究

赵 东 王兴泰

(长春地质学院地球物理系, 长春 130026)

摘要 基于连续地球模型的 BG 理论, 系统地研究了地球物理反问题, 描述了地球物理反问题高度的非唯一性, 给出了构造和评价解估计的一系列准则和方法。根据 BG 方法的一般原理, 针对地震勘探等一类具体问题, 利用地震走时, 实现了地震波速度重建。

关键词 地震层析成象 BG 方法 地球物理

中图分类号 P631.4

地震层析成象技术是研究地震波速度(或波阻抗)空间分布, 显示地下构造, 实现岩性分类以及进行许多非破坏性的探伤、测量和勘查的强有力手段。层析成象有着广泛的实际应用。基于 radon 变换的各种离散成象方法(如 ART、SIRT、SVO 等)近年来发展很快, 在实际应用中已取得了一些成功。

各种广义反演方法、层析成象方法是继 Backus—Gilbert(BG)理论之后发展起来的。两者在理论上有着密切的联系。Backus 和 Gilbert 于 1967~1970 年间发表了关于地球物理反演的三篇文章^[1~3], 奠定了统一的地球物理反演理论和方法基础。BG 方法是关于连续地球模型反问题的理论和方法, 它系统地研究了有限和不精确数据的反问题解的非唯一性, 给出了构造和评价解估计的一系列准则和方法。

本文根据 BG 方法的一般原理, 利用地震波旅行时, 实现了一种速度重建方法。层析成象问题为积分几何的反问题, 也就是根据流形的几何性质(包括几何形式和几何布置), 从函数在流形上的积分确定函数本身^[4], 从这个意义上说, 这种速度重建方法就是一种层析成象方法。通过大量数字模拟研究, 该方法与一些离散 CT 方法相比, 具有算法稳定、有较高的分辨率等一些优点, 成象结果比较理想。

1 BG 理论概述

地球模型可以用有限个有序的函数集表示, 它与希尔伯特空间的元对应, 这种希尔伯特空间称为模型空间(m)。

理想的地球物理数据组成一函数空间, 并称之为数据空间(d), 它与模型空间对应。

一个精确的地球物理数据 d_i 是一个可以由模型 m 通过规定的运算取得的实数, 即

$$d_i = G_i m, \quad (1)$$

其中 G 为数据核, 它表示对于第 i 个数据函数 m 的泛函, 即规定的运算。这样定义的有限

个泛函方程式将数据(d_i)和模型(m)联系起来,反问题归纳为泛函方程组的求解,但此解具有高度的非唯一性,这是由于零空间的存在和数据的有限性决定的。根据某种准则(如 δ -准则,BG展布准则),解的某种平均却是唯一的,也就意味着只能得到解估计 $\hat{m}$,而这种对 m 足够好的估计 $\hat{m}$ 通过 d_i 实现:

$$\hat{m} = Q_i d_i, \quad (2)$$

结合(1)和(2)式有:

$$\hat{m} = Q_i G_i m,$$

上式又可写为:

$$\hat{m} = A m, \quad (3)$$

这里 A 是平均核,它定义为数据核 G_i 的线性组合:

$$A(r, r_0) = \sum_{i=1}^n a_i(r_0) G_i(r), \quad (4)$$

其中 $\{a_i\}, i=1, 2, \dots, n$ 为待定系数组。并且平均核 A 还必须满足单位模条件:

$$\int_n A(r, r_0) dr = 1. \quad (5)$$

(3)式表明,在 $r=r_0$ 处的解估计 $\hat{m}$ 不是 m 本身,而是 m 在 r_0 附近的某种平均。

平均核 A 的确定由某种准则实现。常用的 δ -准则,是使 $A(r, r_0) \approx \delta(r-r_0)$,例如使 $\|A-I\|^2$ 取极小,可确定 A 。 δ -准则的出发点是使 $A(r, r_0)$ 尽量接近广义函数 $\delta(r-r_0)$,当数据 d_i 为无限多时,平均核 $A(r, r_0)$ 将变为 δ 函数,此时解估计 $\hat{m}(r)$ 变为 $m(r)$ 。

上面用 δ -准则构造出反问题的解估计 $\hat{m}$,同样可用 δ -准则对解估计 $\hat{m}$ 进行评价,为此计算 A 对 δ 的接近程度 ψ ,通过 ψ 评价解估计的分辨率。需要指出,对于带有噪音的实际地球物理数据,必须考虑由噪音给解估计和评价带来的影响,这时,提高分辨率和减小方差相互矛盾。因此,正确的评价解估计的准则应该在分辨率和方差之间取合理的折衷,而不是使实测和理论数据之间的拟合差最小^{[5][6]}。

2 方法原理

在所研究区域内($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$),波动沿射线 l_i 的旅行时 t_i 可表示为:

$$t_i = \int_{l_i} \frac{ds}{V}, \quad (6)$$

这里 V 为介质地震波速度,积分沿直线进行,因此要求介质波速变化较小,射线不致于强烈弯曲。

取区域内介质波速 V 的一个合适中间值 V_0 ,视 V_0 为初始模型,波动沿其中射线 l_i 的旅行时 t_{0i} 表示为:

$$t_{0i} = \int_{l_i} \frac{ds}{V_0}. \quad (7)$$

因此到时的观测值与理论值之间的残差 δ_u 为:

$$\delta_u = \int_u \frac{\delta V}{V_0 V} ds,$$

取 $m = \frac{\delta V}{V_0}$, 并当介质波速 V 变化较小时, 上式可重写为:

$$\delta_{ii} = \int_{ii} m \frac{ds}{V_0}. \quad (8)$$

由上式可见, 从旅行时残差 δ_{ii} 的有限系列中就能确定 m 。这里必须清楚, 射线反映的只是所走路径上点的速度分布, 它不包含不在射线上点的任何速度信息。因此从有限的数中不足以确定任意点的速度分布, 我们自然地假定射线之间的速度变化是平滑连续的, 即 m 是平滑的。

为了根据 BG 方法构造 m 的估计值 $\hat{m}$, 可将(8)式改写为:

$$\delta_{ii} = \iint_{\Omega} G_i(r) m(r) dr,$$

由内积定义, 上式写为

$$\delta_{ii} = (G_i(r), m(r)). \quad (9)$$

这里数据核 $G_i(r)$ 在第 i 条路径上非平凡, 在其它处为零。 Ω 为包括所有射线的区域 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$)。

由(3)式有:

$$\hat{m}(r_0) = \iint_{\Omega} A(r, r_0) m(r) dr,$$

上式又写为:

$$\hat{m}(r_0) = (A(r, r_0), m(r)). \quad (10)$$

将(4)式代入(10)式有:

$$\hat{m}(r_0) = (\sum_{i=1}^n a_i(r_0) G_i(r), m(r)) = \sum_{i=1}^n a_i(r_0) (G_i(r), m(r)),$$

再将(9)式代入上式得:

$$\hat{m}(r_0) = \sum_{i=1}^n a_i(r_0) \delta_{ii}. \quad (11)$$

现在由 δ -准则确定系数组 $\{a_i\}$, 为此使

$$S(r) = \iint_{\Omega} |E(r, r_0) - \xi(r, r_0)|^2 dr = \min,$$

$$\text{这里 } \operatorname{div} E(r, r_0) = A(r, r_0), \quad \xi(r, r_0) = \frac{1}{2\pi} \nabla \ln |r - r_0|, \quad (12)$$

利用(4)式和(12)式得:

$$E(r, r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n a_j(r) \nabla H_j(r), \quad (13)$$

其中 $H_j(r) = \frac{1}{V_0} \int_0^1 \ln |r - r_0| dr$ 。

结合(4)、(5)和(9)式得:

$$a^T t_0 = 1, \quad (14)$$

这里 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $t_0 = (t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0n})$ 。

在条件(14)式下, 求(12)式极小值, 最后得到^{[7][8]}:

$$a = S^{-1}H + \frac{1 - T^T S^{-1}H}{T^T S^{-1}T} S^{-1}T, \quad (15)$$

这里,

$$S(i, j) = - \iint \ln |r_i - r_j| \frac{dl_i}{V_0} \frac{dl_j}{V_0}, \quad T = (t_1, t_2, \dots, t_n).$$

将所求的 a 代入(11)式,就确定了速度分布 $V(r)$ 。

3 数字模拟

为了证明本方法的有效性,设计了四个速度模型。图1(a)为一平滑连续变化的速度模型,图中左上部为低速区(最低速为3.0 km/s),图中左中下部为高速区(最高速为3.6 km/s)。成像结果示于图1(b),可见二者吻合得相当好。

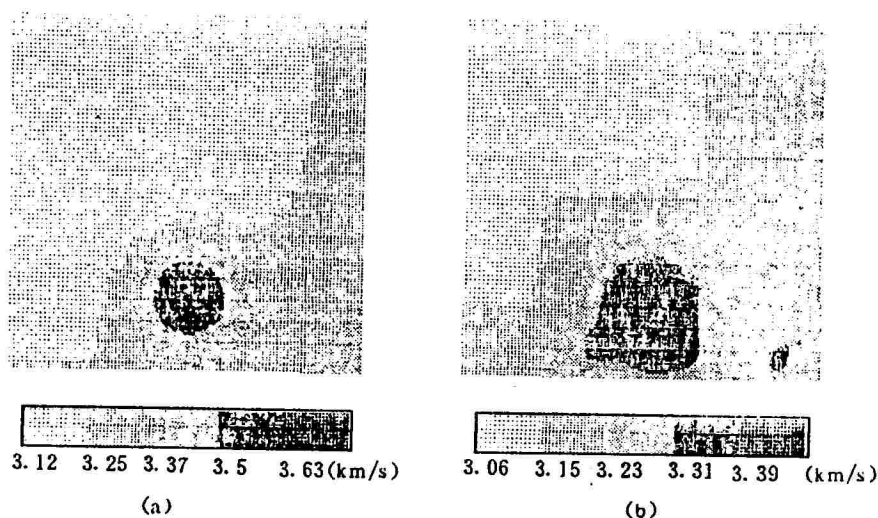


图1(a) 波速平缓变化模型;(b) 波速重建图象

Fig. 1(a) The model of slow changing velocity; (b) The reconstruction image of velocity

图2(a)为低速断层(2.3 km/s)和一圆柱状高速体(3.6 km/s)的组合模型。图2(b)为其成像结果,比较两图,效果也较理想。

以上两个模型的速度变化都是平滑连续的。这也是BG方法取得良好效果的要求。现在设计一个在分界面处速度变化相当剧烈的两层速度模型,如图3(a)所示(上层速度为2.7 km/s,下层速度为3.4 km/s)。这个模型还用有理式模拟表示,图3(a)右边曲线表示了在界面处的速度变化情况。图3(b)为成像结果,它正确地显示了两个层的存在和速度分布。比较(a)和(b)的柱状图,只是(b)在界面处将(a)平滑,变得平缓了。

图4(a)为一个不连续模型,中间高速圆柱体速度为3.5 km/s,周围介质速度为3.0 km/s,二者之间为不连续间断面。这里看到尽管模型不连续,但成像结果(图4(b))还是很好地反映了异常体的位置,只是间断面变得有些“模糊”了。

以上数字模拟结果反映出一个共同特点,那就是象将模型平滑了。但随着射线数量增多,数据量增大,这种平滑的范围会越来越小。间断面就会逐渐清晰起来。

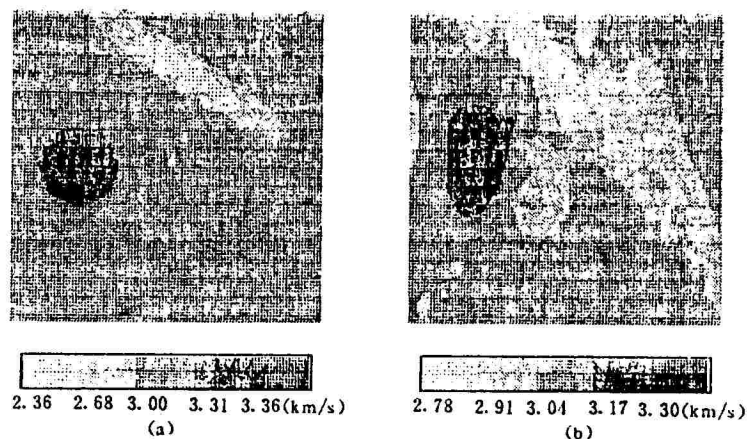


图 2(a) 断层和高速圆柱体组合模型; (b) 波速重建图象

Fig. 2 (a) The combined model of fault and high velocity cylinder

(b) The reconstruction image of velocity

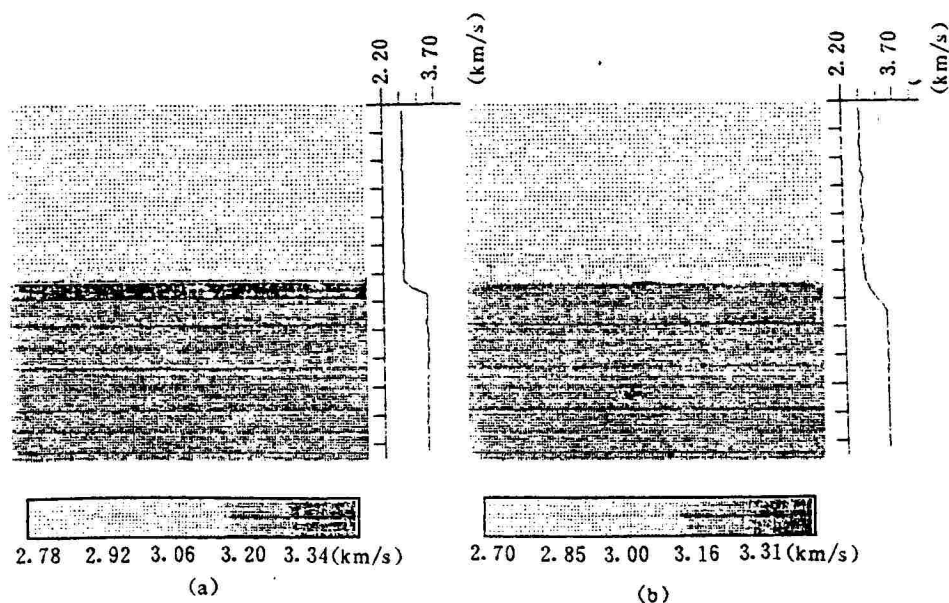


图 3(a) 二层速度模型; (b) 波速重建图象(右侧为其相应的波速柱状图)

Fig. 3(a) Two layer model; (b) The reconstruction image of velocity

4 结论和建议

通过数字模拟和分析研究, 提出以下结论和建议。

(1) 本文方法是连续图象重建方法, 它可以连续地确定图象函数 $V(r)$ 在每一点上的值, 而离散图象重建方法求出的仅仅是象元内 $V(r)$ 的平均值, 因此离散 CT 的分辨率受到象元大小的限制, 在原始数据相同的条件下, 本文方法就没有这种约束。

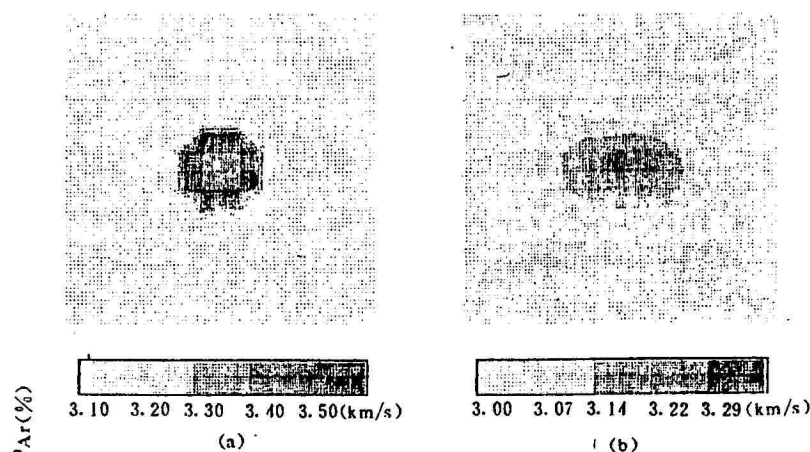


图 4(a) 圆柱状高速体模型(有间断面);(b) 波速重建图象

Fig. 4 (a) The cylindrical model with high velocity

(b) The reconstruction image of velocity

(2)虽然BG方法是关于连续地球模型的理论,但不连续只在数学上有严格的意义,如间断面处函数取不定值。但在实际地球物理中,间断的意义就没有那么严格,至少一个存在不连续间断面的介质的速度分布可以用一个多项式来逼近。而多项式是连续的。从这个意义上,BG方法也可用于实际中不连续介质情况,存在的只是分辨率高低问题。图4(a,b)已充分说明了这一点。

(3)应用BG方法的一个局限是它的计算费用昂贵,但在本方法中,通过改进计算,使计算量大幅度下降,与已有的某些CT方法相比,本方法的计算成本可以接受。

(4)可确定所研究区域内任意个数和任意位置的点的解估计,这也是本方法较离散CT优越之处。

(5)所研究区域内波速变化不强烈时,成像结果能准确地判断异常体的位置和形状。而波速变化较小的条件,在地震波勘探中常常容易得到满足。当波速变化较大时,采用加密射线或用迭代方法均可提高分辨率,而使成像质量得以提高。

(6)仅考虑直射射线是造成图象畸变的一个原因,如采用射线追踪方法,考虑射线弯曲情况,成像效果一定会更好。

(7)本文未对解估计质量进行有效的评价。这项工作有待进一步进行。

本文在完成过程中,殷长春副教授提供了部分资料,同时得到孙仁国副教授的支持和鼓励。作者在此表示感谢。

参 考 文 献

- 1 Backus G E, Gilbert J F. Numerical application of a formulism for geophysical innerser problem. Geophy. J. R. astr. soc., 1967, 13: 247~276
- 2 Backus G E, Gilbert J F. The resolving power of gross earth data. Geophys. J. R. astr. soc., 1968, 16: 169~205

- 3 Backus G E, Gilbert J F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Phil. Trans. Roy. Soc., London, ser. A*, 1970, **266**: 123~192
- 4 马争鸣, 李衍达. 地震层析成像. *石油地球物理勘探*, 1991, **26**(1): 109~124
- 5 杨文采. 地球物理反演和地震层析成像, 北京: 地质出版社, 1989
- 6 Aki K, Richards P G. *Quantitative seismology theory and methods*. Vol. 1. W. H. Freeman and Company, 1980
- 7 Chou C W, Booker J R. A Backus—Gilbert approach to the inversion of travel —time data for three dimensional velocity structure. *Geophys. J. R. astr. soc*, 1979, **59**: 325~344
- 8 Yanorskaya T B. Solution of the inverse problem of seismology for laterally inhomogeneous media. *Geophys J R. astr. soc*, 1984, **79**: 293~304

BG METHOD IN SEISMIC TOMOGRAPHY

Zhao Dong Wang Xingtai

(*Changchun Univ. of Earth Sciences, Changchun 130026*)

Abstract On the basis of Backus—Gilbert theory of continuous earth model, the authors systematically studied the geophysical inverse problems, with emphasizing the height nonuniqueness of inversion, and provided a series of criteria and methods for solution estimation construction and evaluation. This paper realized the seismic velocity reconstruction through using the travel—time, and the general principle of BG method. Compared with some present methods of seismic tomography, this method has many virtues, such as algorithms stability and higher resolution. The tomographic results due to this method are ideal.

Key words seismic tomography, BG method, geophysics