数字信号处理基础

赵 东

骄佳技术公司
(Geogiga Technology Corp.)

提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 采样定理
- 结语

提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 采样定理
- 结语

傅立叶级数

任何复杂的周期函数 *g(t)* 均可分解为简单的三角函数，既正弦和余弦函数之和

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

三种表达是等价的

这里 $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$

傅立叶级数-傅立叶系数

由三角系的正交性可得到傅立叶系数a_n和 b_n ：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cos n\omega_0 t dt$$

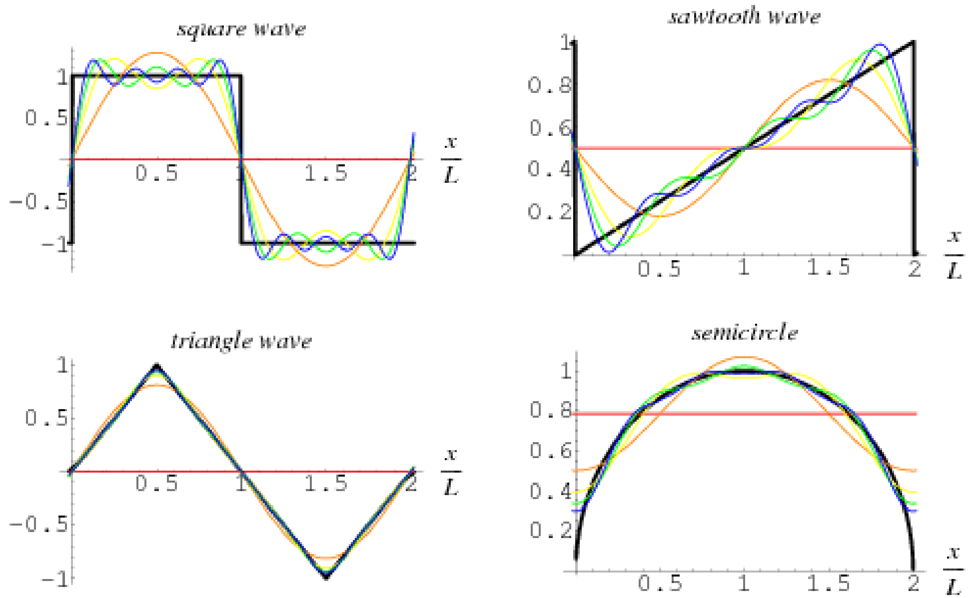
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\sin n\omega_0 t dt$$

或 $$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \longleftarrow$$ 一般式

傅立叶级数-示例

研究傅立叶级数有重要意义，它将复杂函数分解为一系列简单函数（谐波），而用该简单函数则容易求得问题的解，再将解复合而得到原始问题的最终解或其某种程度的近似。

在地球物理中的典型应用是信号的频谱分析和波动方程的求解.



from Wolfram MathWorld

提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 采样定理
- 结语

傅立叶变换

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

当周期 T 趋于无穷大, $\omega_0 = 2\pi/T$趋于无穷小, $n\omega_0$ 则为连续变量ω

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \quad \underset{\text{傅立叶逆变换}}{\overset{\text{傅立叶变换}}{\rightleftarrows}} \quad g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= R(\omega) + jX(\omega)$$

$$= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= \tan^{-1}[X(\omega)/R(\omega)]$$

相位谱

$$=[R^2(\omega)+X^2(\omega)]^{1/2}$$

振幅谱

傅立叶变换-DFT 与 FFT

实际信号是离散的，傅立叶变换通过离散傅立叶变换(DFT)实现，而快速傅立叶变换 (FFT)是极其高效的计算DFT的方法。

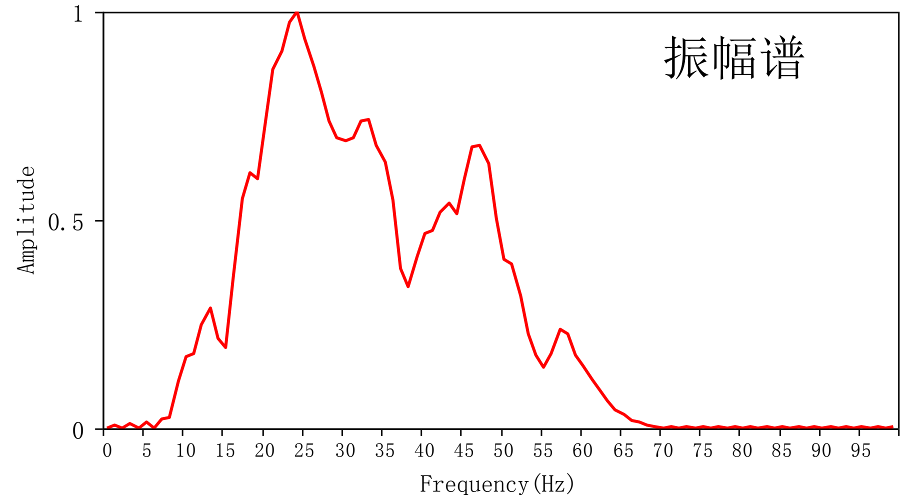
给定N个样点 g_0, g_1, …, g_{N-1}, DFT 定义为

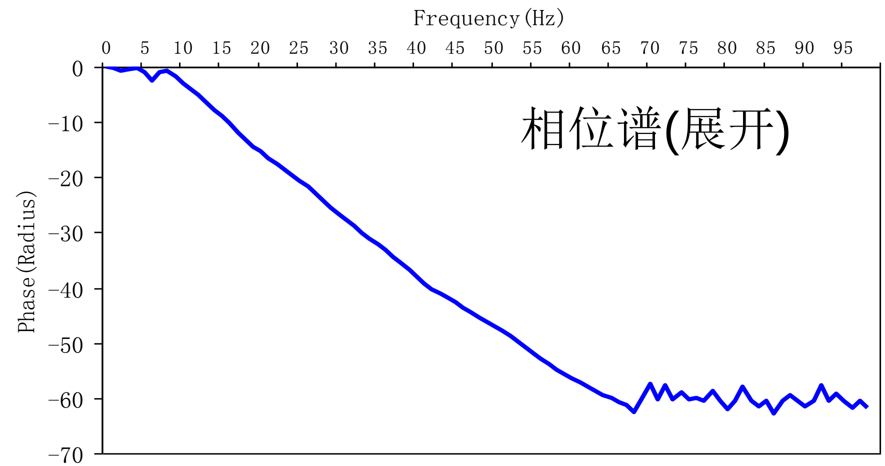
$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi k\frac{n}{N}}, k = 0, \ldots, N-1$$

直接计算该式需要 $O(N^2)$次运算，而FFT只需要 O(N log N)次运算。

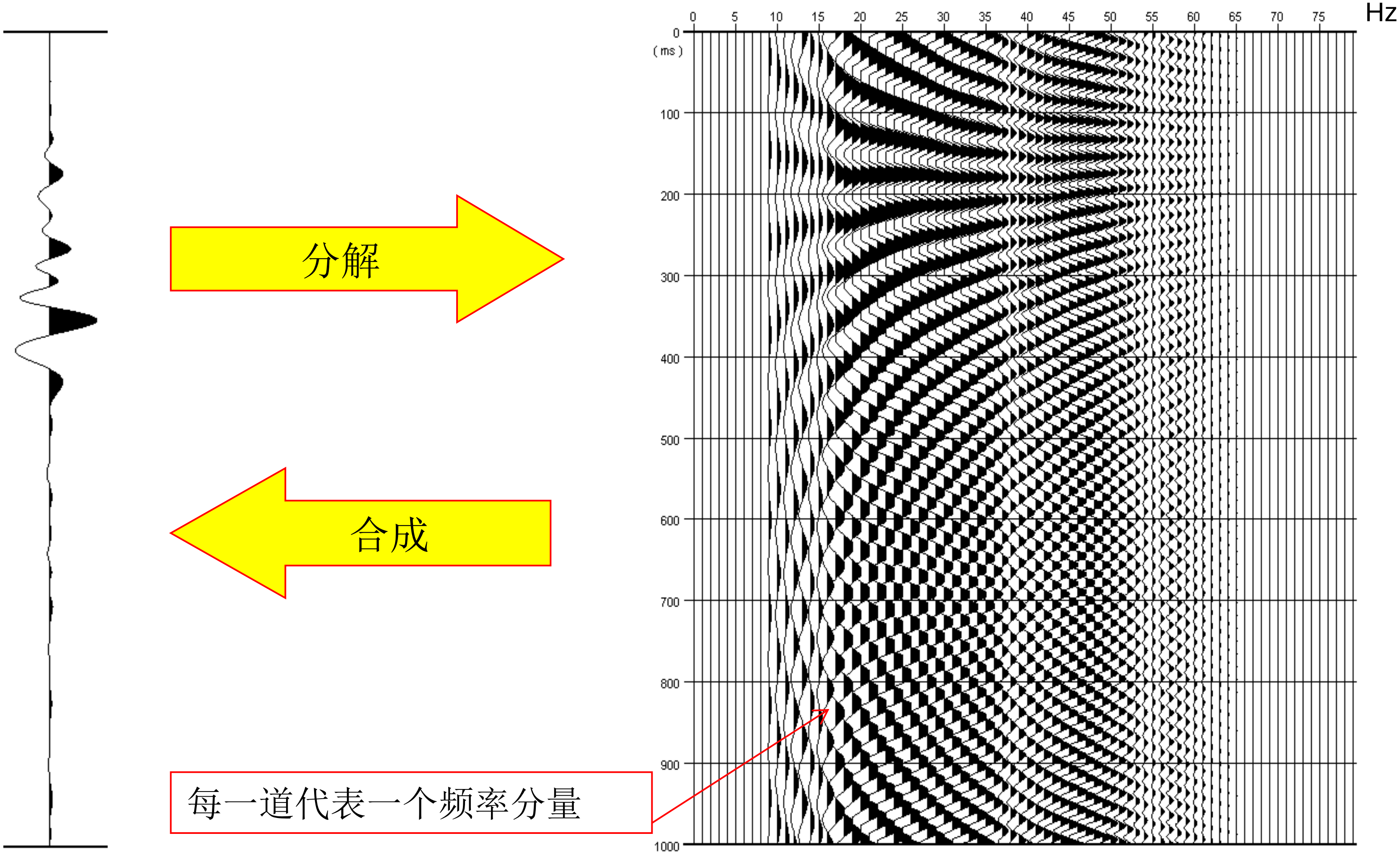
傅立叶变换-振幅与相位谱

傅立叶变换
(FFT)

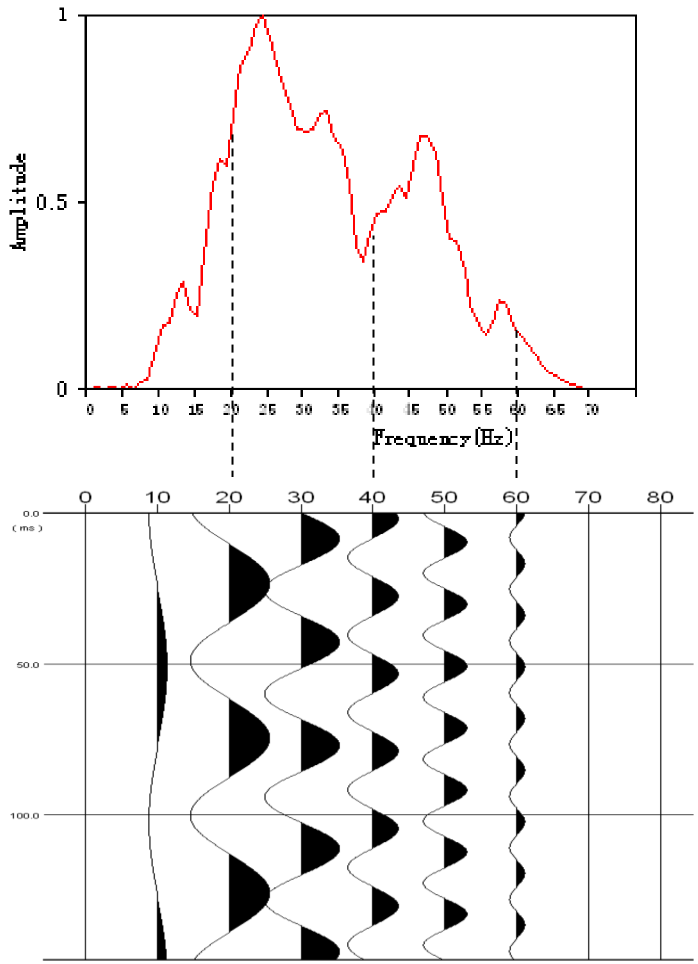




傅立叶变换-分解与叠加

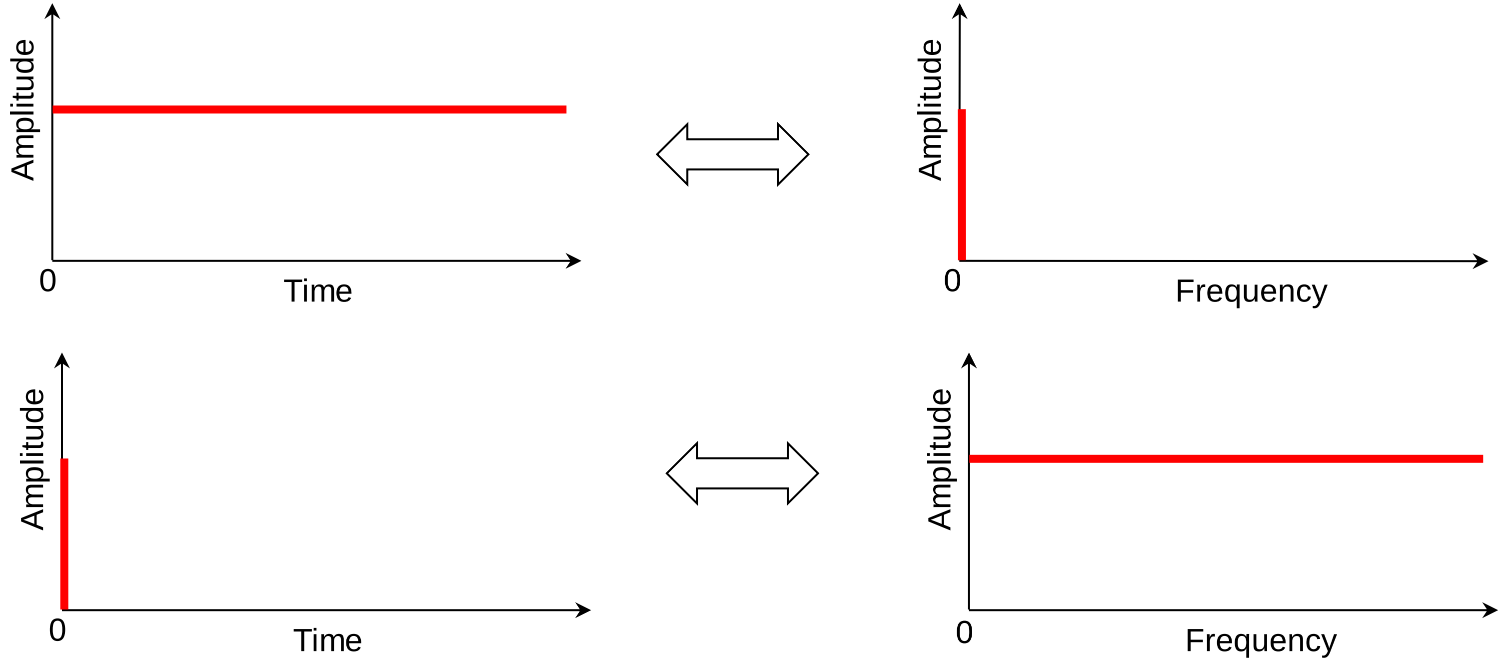

分解
合成
每一道代表一个频率分量
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75
Hz
0
(ms)
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

傅立叶变换-频率分量



注意初始相位是如何随频率变化的

傅立叶变换-两个特例



$$f(at) \sim F(f/a)$$

压缩信号则扩展其频谱；反之亦然。

提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 采样定理
- 结语

采样定理

当进行模拟 / 数字转换时，一个连续信号每隔一定间隔被均匀采样；显然，样点间的信息丢失了。

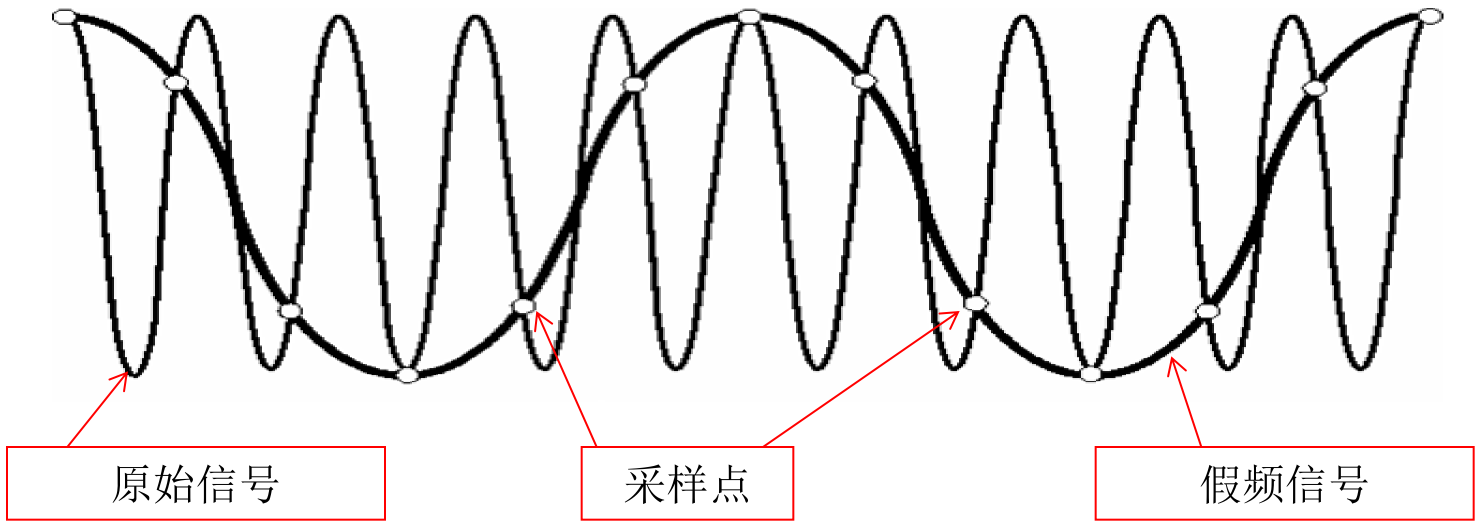
样点越密，信息丢失越少。

采样定理：一个连续信号g(t)可从离散样点完全恢复，如果g(t)所包含的最高频率不超过奈奎斯特(Nyquist)频率f_n, fn= 1/(2dt)=采样频率的一半。

换言之，为保证信号不失真，在信号所包含的最高频率的一个周期上，至少有两个样点。

采样定理-假频

对于一个给定频率，如果每个周期的采样点数少于2，则该信号不能被正确恢复，即出现假频现象。



采样频率 = 120Hz,

奈奎斯特频率 = 60Hz < 100Hz = 原始信号频率

采样定理–假频(续)

问题 1：

如果采样间隔是0.5ms，则可记录信号的最高频率是多少?

问题 2:

如果记录最高有效频率是80Hz的信号，最大采样间隔是多少? 如果该信号含有约为200Hz的噪音，是否必要提高采样率?

答案 1: 1/0.0005s/2 = 2000Hz/2 = 1000Hz

答案 2: 1/80Hz/2 = 12.5ms/2 = 6.25ms

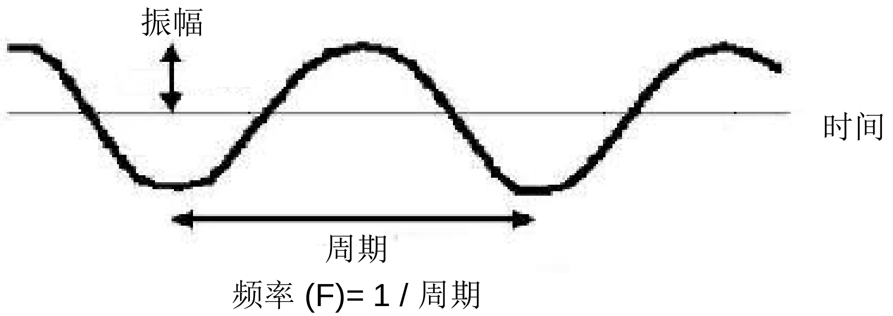
有必要提高采样率，如果采样率仍是6.25ms, 则噪音发生假频，而损害有效信号。

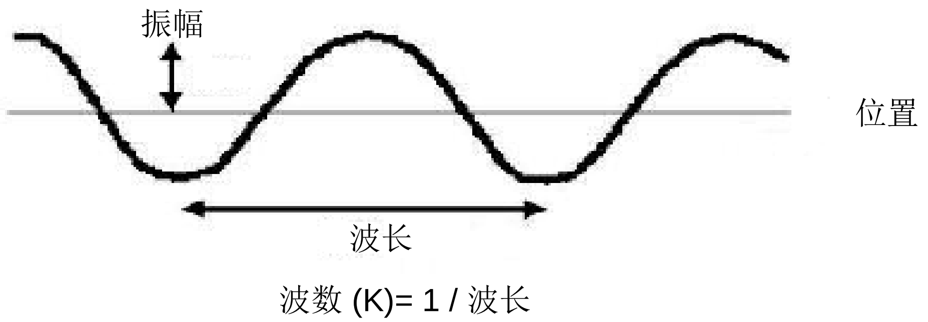
采样率必须低于1/200Hz/2 = 5ms/2=2.5ms, 然后用滤波法（如带通滤波）剔除噪音。

采样定理– 空间采样

采样即可在时间，也可在空间进行。

当沿线上有多个检波器，则实现了对波场的空间采样。





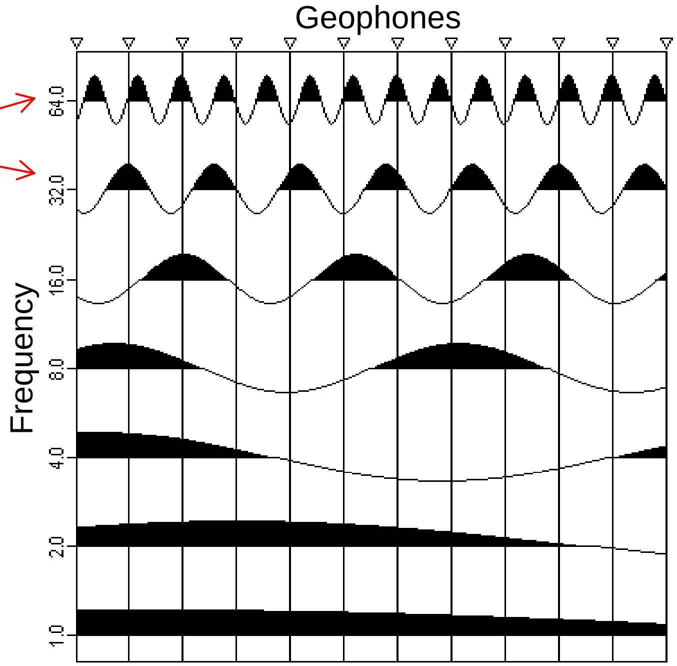
采样定理– 空间假频

奈奎斯特波数 $K_n = 1/(2\Delta x)$

相应的波长为 $\lambda_n = 2\Delta x$

当 $\Delta x > \lambda_n/2$，出现空间假频

因每个波长的样点数少于2个，出现假频。



例如：

假设有一40Hz的单调谐波以200m/s的速度沿地表传播，为使记录的波动不失真，则观测点间距必须小于2.5m.

$(\Delta x = \lambda/2 = 200m/s/40Hz/2 = 2.5m)$

提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 采样定理
- 结语

结语

1. 傅立叶级数表明一个复杂的函数可表示为三角函数（sin和cos）的和
2. 傅立叶变换可确定信号中各个频率分量的振幅和相位
3. 离散采样必须满足采样定理，否则将发生假频